Για τον $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του και οι βάσεις του αντίστοιχου ιδιόχωρου.

ΛΥΣΗ

$Au=\lambda u \Rightarrow Au-\lambda u=\bar{0} \Rightarrow (A-I\lambda)u=0$

(Και λόγω ότι στην ουσία ψάχνουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θεωρούμε $\lambda=x$)

Άρα $(A-Ix)u=0$ ①

Θα πρέπει $\det(A-Ix)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix}1-x & -3 & 3\\ 0 & -1-x & 2\\ 0 & -3 & 4-x\end{pmatrix}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1-x)\cdot\det\begin{bmatrix}-1-x & 2\\ -3 & 4-x\end{bmatrix}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1-x)\cdot\left((-1-x)(4-x)+6\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-x=0$ ή $(-1-x)(4-x)+6=0$

$\Rightarrow x=1$ ή $x^2-4x+x-4+6=0$

$\Rightarrow x=1$ ή $x^2-3x+2=0$

$\Rightarrow x=1$ ή $x=1$ ή $x=2$

Υπάρχουν οι εξής ιδιοτιμές

$x=1 \leftarrow$ πολ/τας 2 , $x=2$ πολ/τας 1

• $x = 1 \rightsquigarrow ①$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -3 & 3 \\ 0 & -1-1 & 2 \\ 0 & -3 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad -3y + 3z = 0 \Rightarrow -y + z = 0 \Rightarrow y = z$

$(x, y, z) = (x, z, z) = x(1,0,0) + z(0,1,1)$

Άρα, $V(1) = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle$

Με $\dim V(1) = 2$

• $x = 2 \rightsquigarrow ①$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - 3y + 3z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2}{3}z$$

και $x = 3z - 3\frac{2}{3}z \Rightarrow \boxed{x = z}$

$(x, y, z) = (z, \frac{2}{3}z, z) = z(1, \frac{2}{3}, 1)$

Άρα, $V(2) = \langle (1, \frac{2}{3}, 1) \rangle = \langle (3, 2, 3) \rangle$

Με $\dim V(2) = 1$.